Del B	Uppgift 1-6. Endast svar krävs.
Del C	Uppgift 7-15. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för Del B och Del C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

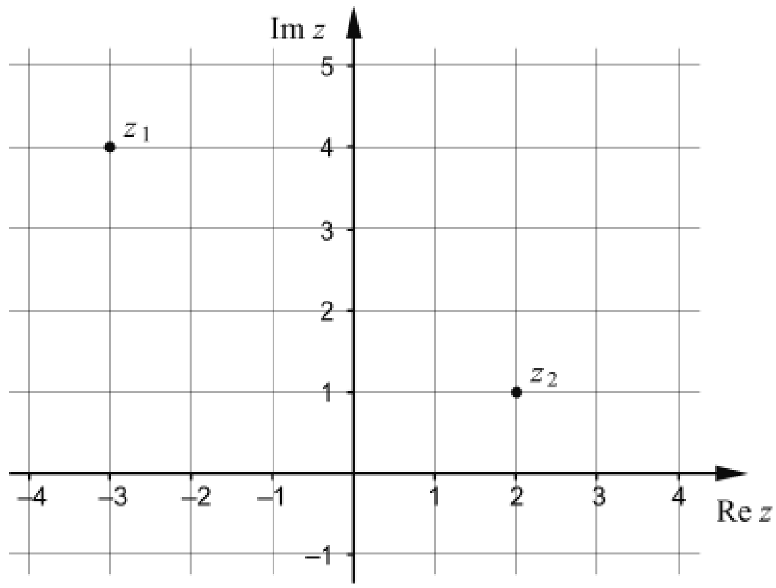
Del B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Derivera

a) $f(x) = \sin 2x$ ______________________ (1/0/0)

b) $g(x) = (4x+1)^5$ ______________________ (1/0/0)

2. Figuren visar ett komplext talplan där talen z_1 och z_2 är markerade.

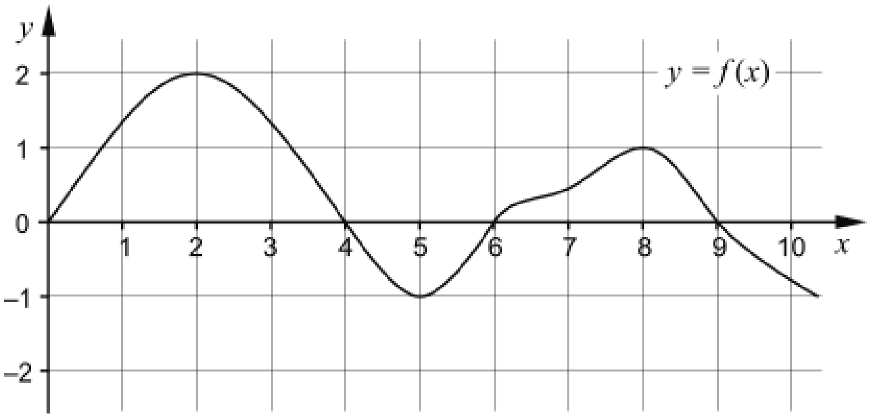


a) Bestäm $\bar{z}_2$ ______________________ (1/0/0)

b) Bestäm $z_1 + z_2$ ______________________ (1/0/0)

3. Ange den lodräta asymptoten till $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ ____________________ (1/0/0)

4. Figuren visar grafen till funktionen f.



För vilket värde på a i intervallet $0 \le a \le 10$ antar

$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ sitt största värde? ____________________ (0/1/0)

5. För vilka vinklar i intervallet $0° < v < 90°$ gäller att $\sin 3v < \dfrac{1}{2}$?

____________________ (0/1/1)

6. Ange en kontinuerlig funktion f som är definierad för alla x och har värdemängden $-1 \le f(x) \le 7$

____________________ (0/0/1)

Del C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

7. Några elever har fått i uppgift att beräkna $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

Agnes får svaret e
Ingela får svaret 0
Kerstin får svaret 1

Har någon av dem räknat rätt? Motivera ditt svar. (2/0/0)

8. För två komplexa tal z_1 och z_2 gäller att:

- $z_1 \cdot z_2 = 7 + i$
- $z_1 = 3 - i$

Bestäm z_2 på formen $a + bi$ (2/0/0)

9. a) Visa att $\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)=1$ för alla x där uttrycken är definierade. (2/0/0)

b) Visa att $\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos x - \sin x$ (0/2/0)

10. Lös ekvationen $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1/1/0)

11. För funktionen f gäller att $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

a) Ange asymptoterna till funktionen f *Endast svar krävs* (1/1/0)

b) Skissa grafen till funktionen f och dess asymptoter. (0/2/0)

c) Lös olikheten $|f(x)| > 3$ där $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ (0/0/2)

12. Ekvationen $z^p = \mathrm{i}$ ska undersökas för olika värden på heltalet p.
För vissa värden på heltalet p är $z_1 = \cos 9° + \mathrm{i}\sin 9°$ en lösning till ekvationen $z^p = \mathrm{i}$

a) Visa att detta gäller för $p = 50$, det vill säga visa att z_1 är en lösning till $z^{50} = \mathrm{i}$ (0/2/0)

b) Bestäm alla heltalsvärden på p för vilka z_1 är en lösning till ekvationen $z^p = \mathrm{i}$ (0/0/2)

13. För polynomet p gäller att $p(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$

a) Visa att $(z^2 + 4)$ är en faktor i polynomet p. (0/2/0)

b) Lös ekvationen $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$ (0/1/2)

14. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/6} (2\sin x + 5)\cos x \, \mathrm{d}x$ (0/0/2)

15. Lasse och Niklas ska lösa följande uppgift:

> Undersök om funktionen $f(x) = \dfrac{1}{2x-5}$ antar något största värde då $x \geq 0$

Lasse löser uppgiften så här:

$f(x) = \dfrac{1}{2x-5}$

$f'(x) = -\dfrac{2}{(2x-5)^2} < 0$ för alla x.

Då är f avtagande och har sitt största värde i den vänstra ändpunkten, d.v.s. för $x = 0$.

$f(0) = -\dfrac{1}{5}$

Svar: Det största värdet är $-\dfrac{1}{5}$

Niklas säger att Lasses svar är fel eftersom funktionen kan anta större värden än $-\dfrac{1}{5}$. Till exempel antar funktionen värdet 1 då $x = 3$

Utred vilket fel Lasse gör i sin lösning och lös den givna uppgiften. (0/0/3)

Del D	Uppgift 16-23. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

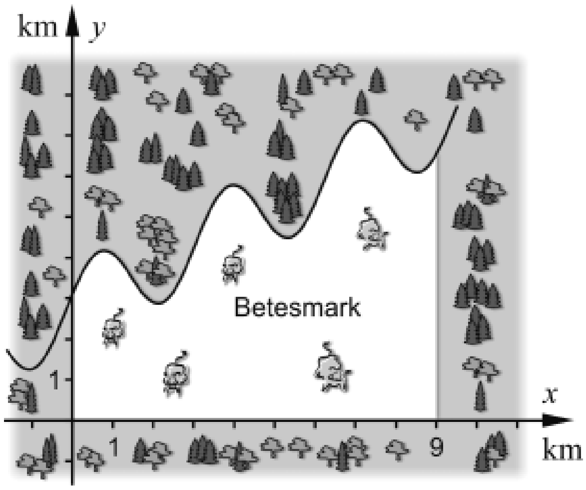
Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Del D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

16. Skriv det komplexa talet $z = 2 + 2\mathrm{i}$ på polär form. (2/0/0)

17. En betesmark för kor avgränsas av skog och en ringlande bäck enligt figuren nedan.



Enligt en förenklad modell kan bäckens läge beskrivas med funktionen
$f(x) = 0{,}5x + \sin 2x + 3$

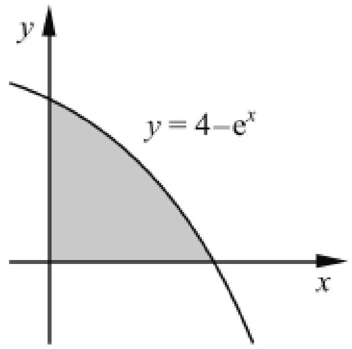
Beräkna betesmarkens area. (2/0/0)

18. Ekvationen $\dfrac{x}{5} + \cos 2x = 2$ har flera lösningar.
Samtliga lösningar ligger i intervallet $-20 \le x \le 20$

a) Bestäm den minsta lösningen till ekvationen.
Svara med minst tre värdesiffror. (1/0/0)

b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen. (1/0/0)

19. I figuren nedan visas det område som begränsas av kurvan $y = 4 - e^x$ och koordinataxlarna.



När området roteras runt x-axeln bildas en rotationskropp.
Teckna ett uttryck för rotationskroppens volym och bestäm dess värde med minst tre värdesiffror. (0/3/0)

20. En fågelunge faller från en 8,0 m hög klippa. För att förenklat beskriva fallrörelsen kan följande differentialekvation ställas upp:

$\frac{dv}{dt} + 5v = 10$ där v är fallhastigheten i m/s efter tiden t sekunder.

a) Visa att $v(t) = 2 - 2 \cdot e^{-5t}$ är en lösning till differentialekvationen. (1/0/0)

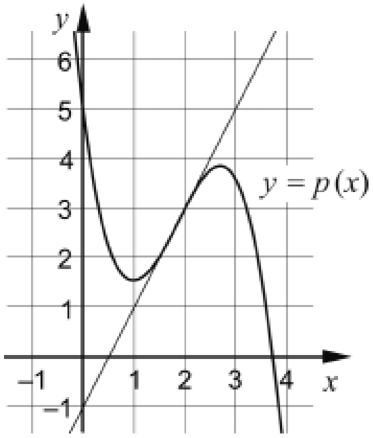
b) Bestäm tiden det tar för fågelungen att falla 8,0 m. (0/3/0)

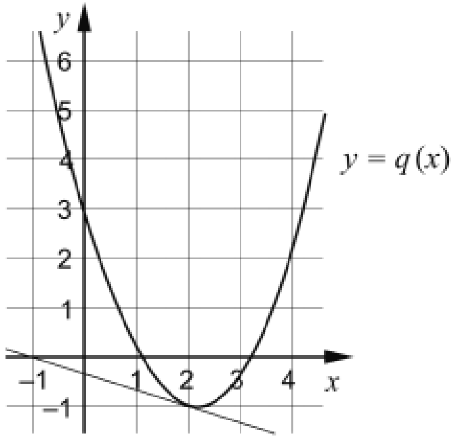
21. Ett företag har undersökt hur länge kunder som ringer till deras kundservice behöver vänta innan de får svar. De har funnit att väntetiden t minuter har en fördelning som kan beskrivas med täthetsfunktionen $f(t) = \frac{1}{6} e^{-t/6}$, $t \geq 0$

a) Bestäm sannolikheten att en kund som ringer till företaget behöver vänta högst 10 minuter på svar. (0/2/0)

b) Företaget vill informera om resultatet av undersökningen genom följande formulering: ”Vår kundundersökning visar att 50 % av våra kunder behöver vänta högst x minuter.”
Bestäm värdet på x. (0/2/0)

22. Figurerna visar kurvorna $y = p(x)$ och $y = q(x)$ samt tangenterna till dessa för $x = 2$

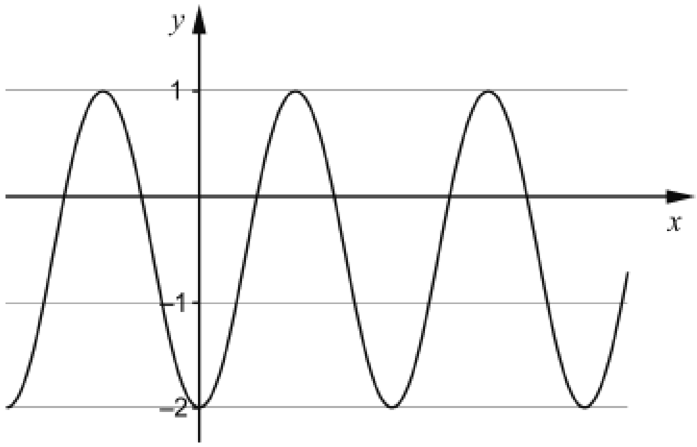




Låt $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ och bestäm $r'(2)$. (0/0/2)

23. I Lisas matematikbok finns följande uppgift:

> Figuren visar kurvan $y = A\sin^2 x + B$
> Bestäm konstanterna A och B.



Lisa löser uppgiften så här:

$$A = \frac{1-(-2)}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$B = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$$ Svar: $A = 1,5$ och $B = -0,5$

Lisas lösning är inte korrekt. Hjälp Lisa att lösa uppgiften korrekt. (0/0/2)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt olika modeller:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan innehålla något ovidkommande eller sakna något steg. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

Förutom den allmänna beskrivningen av kraven kan ibland mer utförliga beskrivningar ges i samband med de bedömda elevlösningar där kommunikationspoäng förekommer.

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 21a_1 och 21a_2 den första respektive andra poängen i uppgift 21a.

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
Del B	1a		1										
	1b		1										
	2a	1											
	2b		1										
	3	1											
	4					1							
	5_1					1							
	5_2									1			
	6									1			
Del C	7_1		1										
	7_2				1								
	8_1			1									
	8_2			1									
	9a_1				1								
	9a_2				1								
	9b_1								1				
	9b_2								1				
	10_1		1										
	10_2						1						
	11a_1	1											
	11a_2					1							
	11b_1						1						
	11b_2								1				
	11c_1											1	
	11c_2									1			
	12a_1						1						
	12a_2						1						
	12b_1											1	
	12b_2											1	
Del C	13a_1								1				
	13a_2								1				
	13b_1						1						
	13b_2											1	
	13b_3												1
	14_1											1	
	14_2											1	
	15_1												1
	15_2												1
	15_3												1
Del D	16_1	1											
	16_2	1											
	17_1			1									
	17_2			1									
	18a		1										
	18b		1										
	19_1						1						
	19_2						1						
	19_3						1						
	20a		1										
	20b_1							1					
	20b_2							1					
	20b_3								1				
	21a_1							1					
	21a_2							1					
	21b_1							1					
	21b_2							1					
	22_1									1			
	22_2											1	
	23_1											1	
	23_2											1	
	Total	**5**	**8**	**4**	**6**	**3**	**8**	**6**	**7**	**4**	**0**	**9**	**7**
Σ	**67**	**23**				**24**				**20**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma4															
					Aritmetik, algebra och förändring								Samband och förändring					Problem-lösning		
		E	C	A	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	F17	F18	F19	F20	F21	P1	P3	P4
Del A		3	1	3																
Del B	1a	1	0	0											X					
	1b	1	0	0											X					
	2a	1	0	0		X	X													
	2b	1	0	0	X	X														
	3	1	0	0										X						
	4	0	1	0												X				
	5	0	1	1							X		X							
	6	0	0	1									X							
Del C	7	2	0	0												X				
	8	2	0	0	X													X		
	9a	2	0	0						X		X								
	9b	0	2	0						X		X								
	10	1	1	0							X									
	11a	1	1	0										X						
	11b	0	2	0										X						
	11c	0	0	2									X	X				X		
	12a	0	2	0	X			X												
	12b	0	0	2	X			X										X		
	13a	0	2	0					X			X								
	13b	0	1	2					X									X		
	14	0	0	2						X						X		X		
	15	0	0	3										X						
Del D	16	2	0	0	X															
	17	2	0	0												X		X		
	18a	1	0	0							X									
	18b	1	0	0							X									
	19	0	3	0												X				
	20a	1	0	0													X			
	20b	0	3	0													X	X		
	21a	0	2	0												X		X		
	21b	0	2	0												X		X		
	22	0	0	2											X			X		
	23	0	0	2							X		X					X		
Total		23	24	20																

Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Del B

1.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar ($f'(x) = 2\cos 2x$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($g'(x) = 20(4x+1)^4$)	+1 E_P

2.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar ($2-\mathrm{i}$)	+1 E_B
b)	Korrekt svar ($-1+5\mathrm{i}$)	+1 E_P

3.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar ($x=-2$)	+1 E_B

4.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar ($a=9$)	+1 C_B

5.		**Max 0/1/1**
	Anger minst ett av de korrekta intervallen, t ex $0° < v < 10°$	+1 C_B
	med korrekt svar ($0° < v < 10°$ och $50° < v < 90°$)	+1 A_B

Kommentar: Även svaren $v < 10°$ och $v > 50°$ anses godtagbara då intervallet $0° < v < 90°$ är givet.

6.		**Max 0/0/1**
	Korrekt svar (t ex $f(x) = 3 + 4\sin x$)	+1 A_B

Del C

7. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex beräknar integralen till $\ln \mathrm{e} - \ln 1$ +1 E_P

med i övrigt godtagbart resonemang (t ex ”Ja, svaret blir 1. Kerstin har rätt.”) +1 E_R

8. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex anger att $z_2 = \dfrac{(7+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z_2 = 2 + \mathrm{i}$) +1 E_{PL}

9. **Max 2/2/0**

a) Godtagbar ansats, t ex förenklar VL till $\sin^2 x + \cos^2 x$ +1 E_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

b) Godtagbar ansats, använder additionssatsen korrekt +1 C_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 C_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

10. **Max 1/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minst en lösning till ekvationen +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = \pm 15° + n \cdot 180°$) +1 C_P

11. **Max 1/3/2**

a) Anger den vågräta *eller* lodräta asymptoten +1 E_B

med korrekt svar ($x = 3$ och $y = 1$) +1 C_B

b) Godtagbar skissning av grafen där båda asymptoterna ingår +1 C_P

med korrekt inritade asymptoter och en graf som tydligt närmar sig asymptoterna +1 C_K

Kommentar: Med godtagbar skissning av grafen menas att grafen, med sitt karakteristiska utseende, ligger på rätt sida om asymptoterna men behöver inte vara korrekt inritad punkt för punkt.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

c) Godtagbar ansats, bestämmer det ena delintervallet, t ex $3 < x < 5$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($2 < x < 3$ eller $3 < x < 5$) +1 A_B

Kommentar: En lösning med svaret $2 < x < 5$ ges ansatspoängen för problemlösning på A-nivå.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

12. **Max 0/2/2**

a) Godtagbar ansats, använder de Moivres formel korrekt +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning +1 C_P

b) Godtagbar ansats, bestämmer ytterligare minst ett värde på *p* med den givna egenskapen +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($p = 10 + n \cdot 40$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

13. **Max 0/3/2**

a) Godtagbar ansats, t ex påbörjar en korrekt uppställd polynomdivision +1 C_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 C_R

b) Godtagbar ansats, bestämmer minst tre rötter +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z_1 = -2i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = \sqrt[3]{2}$,
$z_4 = \sqrt[3]{2}(\cos 120° + i \sin 120°)$ och $z_5 = \sqrt[3]{2}(\cos 240° + i \sin 240°)$) +1 A_{PL}

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, minustecken, rottecken, index, parenteser, termer såsom polär form, koefficient samt hänvisning till de Moivres formel etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

14. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, bestämmer en korrekt primitiv funktion +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($\frac{11}{4}$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

15. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, t ex anger att felet beror på att Lasse inte tar hänsyn till att det finns ett x-värde där funktionen inte är definierad +1 A_R

med i övrigt godtagbart slutfört resonemang med godtagbar slutsats
(t ex ”Nej, den har inget största värde.”) +1 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4.
För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, $f(x)$, $f'(x)$, parenteser, lim, tydlig skiss, termer såsom nollställe, derivata, största värde, definierad, graf, asymptot, x-axel etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Del D

16. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer $\arg(z)$ +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($2{,}8(\cos 45° + \mathrm{i}\sin 45°)$) +1 E_B

17. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, korrekt tecknad integral, $\int_0^9 (0{,}5x + \sin 2x + 3)\,\mathrm{d}x$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (47 km^2) +1 E_M

Kommentar: Om grader använts i stället för radianer fås det ej godtagbara svaret 49 km^2.

18. **Max 2/0/0**

a) Godtagbar lösning med godtagbart svar ($x \approx 5{,}97$) +1 E_P

b) Godtagbar lösning med korrekt svar (7) +1 E_P

19. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer övre integrationsgränsen eller tecknar integralen $\pi\int_0^a (4 - \mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x$ +1 C_P

med godtagbar fortsättning, tecknar ett uttryck för volymen, $\pi \int_0^{1{,}386} (4 - \mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (17,8) +1 C_P

20. **Max 1/3/0**

a) Godtagbar lösning +1 E_P

b) Godtagbar ansats, t ex tecknar en korrekt ekvation för bestämning av tiden,

t ex $\int_0^x (2 - 2 \cdot e^{-5t}) dt = 8$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4,2 s) +1 C_M

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, VL, HL, $v'(t)$, $v(t)$, integraltecken, parenteser, termer såsom differentialekvation, integral, integrationsgräns, primitiv funktion etc. +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

21. **Max 0/4/0**

a) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en integral för bestämning av sannolikheten att väntetiden är högst 10 minuter +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,81) +1 C_M

b) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt ekvation för bestämning av x +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($x \approx 4{,}2$) +1 C_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

22. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex anger att $r'(2) = p(2) \cdot q'(2) + p'(2) \cdot q(2)$ +1 A_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($r'(2) = -3$) +1 A_{PL}

23. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, bestämmer en av konstanterna med godtagbar motivering +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($A = 3, B = -2$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Bedömda elevlösningar

Uppgift 9a

Elevlösning 1 (1 E_R)

a) $$\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)=1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)=\sin^2 x+\cos^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1$$

Kommentar: Elevlösningen bygger från och med tredje raden på likheten som ska visas. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kravet för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 9b

Elevlösning 1 (1 C_R)

b. $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$

VL: $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4}$

$$= \sqrt{2}\cos x\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,\frac{\cos x\sqrt{2} - \sin x\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2}\,\frac{\cos x\sqrt{2} - \sin\sqrt{2}}{2} = \cos x - \sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x\sqrt{2} - \sin\sqrt{2}}{2} = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$$

Man kan skriva om:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot 1$$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}} = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$$

Kommentar: Elevlösningen anses behandla additionssatsen korrekt även om parenteser saknas på rad två och tre. Elevlösningen bygger på likheten som ska visas från och med fjärde raden. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kravet för den andra resonemangspoängen på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_R)

$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$

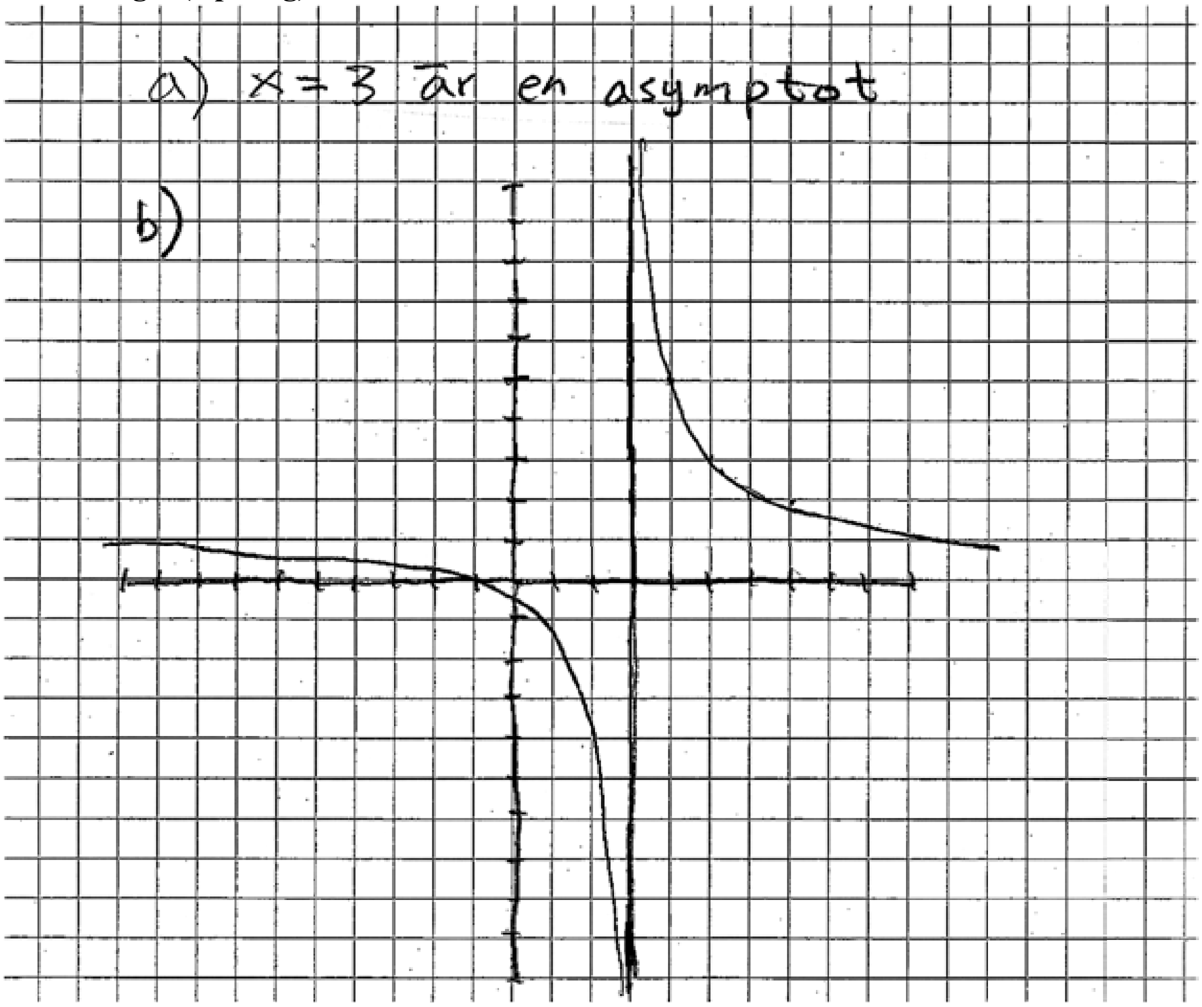
$$V.L. = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\cos x\cdot\cancel{\cos\frac{\pi}{4}} - \sin x\cdot\cancel{\sin\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}} =$$

$$= \cos x - \sin x = H.L.$$

Kommentar: Lösningen visar en korrekt metod för bevisföring. Trots att förenklingen i sista steget är något otydlig så ges lösningen båda resonemangspoängen på C-nivå.

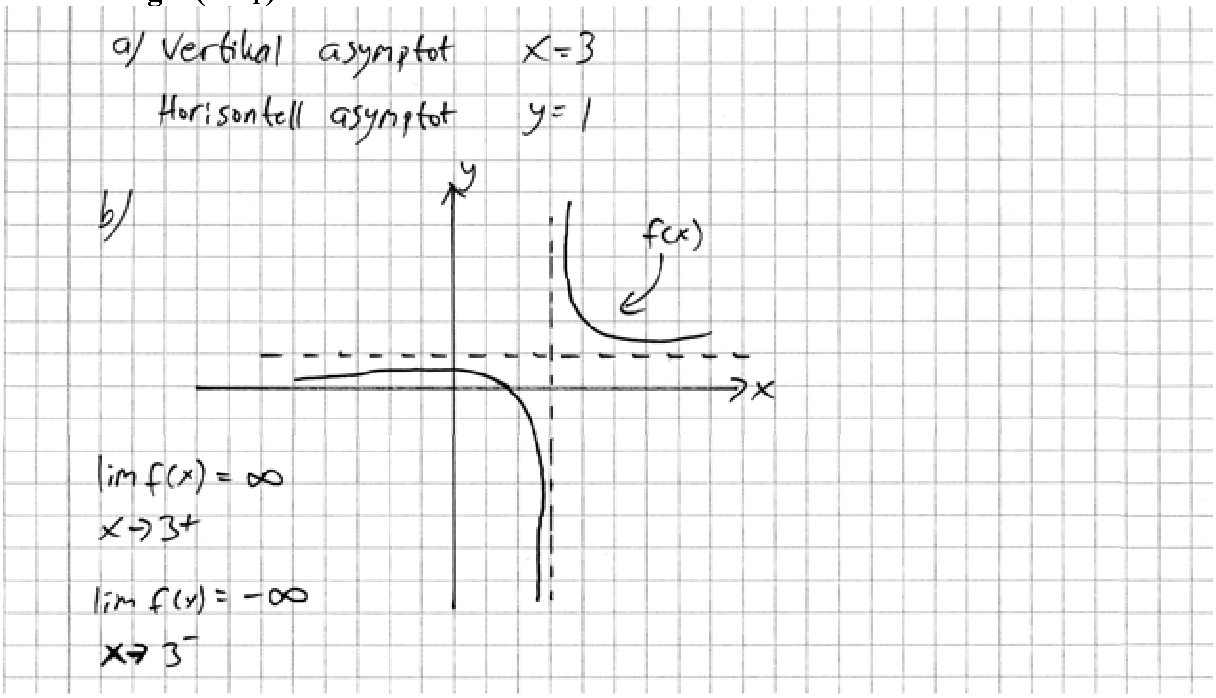
Uppgift 11b

Elevlösning 1 (0 poäng)



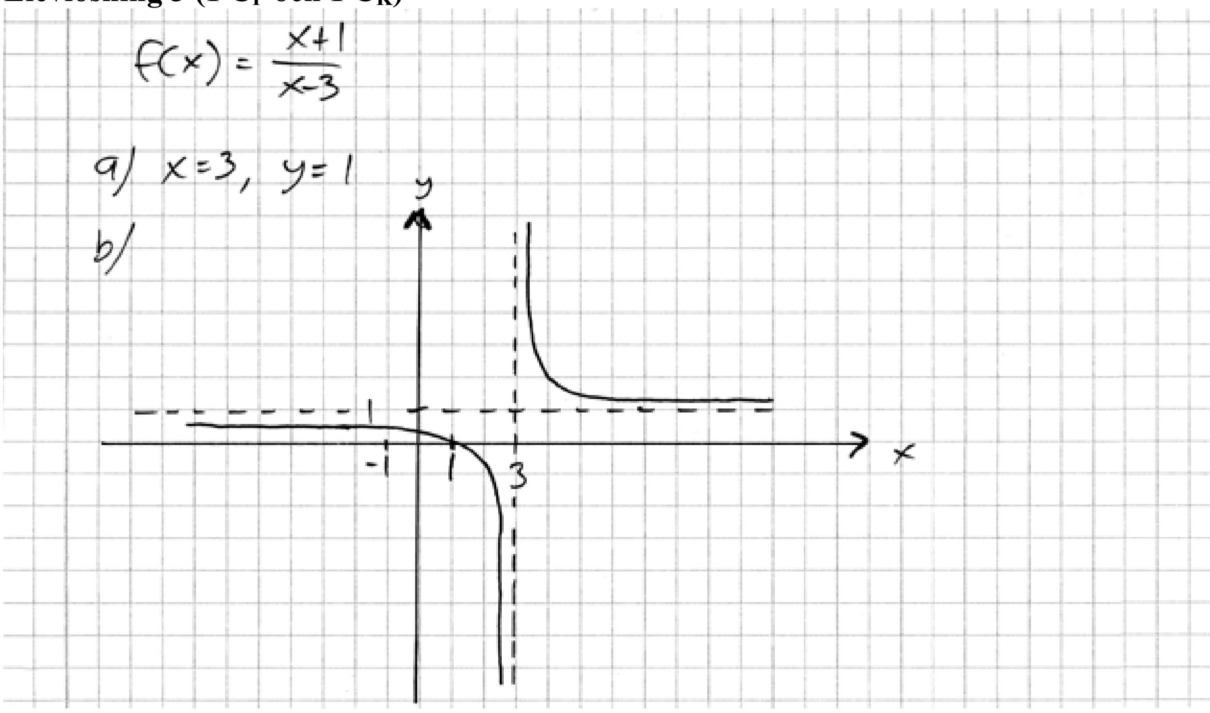
Kommentar: Elevlösningen visar på en skiss där den horisontella asymptoten saknas. Därmed uppfylls inte kravet för ansatspoängen gällande procedur på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_P)



Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar skiss över kurvans karakteristiska utseende. Asymptoterna är inritade men kurvan närmar sig inte dessa. Sammantaget ges lösningen till b)-uppgiften en procedurpoäng på C-nivå.

Elevlösning 3 (1 C_P och 1 C_K)



Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar skiss där asymptoterna är inritade. Även om inte grafen tydligt närmar sig asymptoterna så bedöms skissen vara godtagbar. Sammantaget ges lösningen till b)-uppgiften en procedurpoäng på C-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

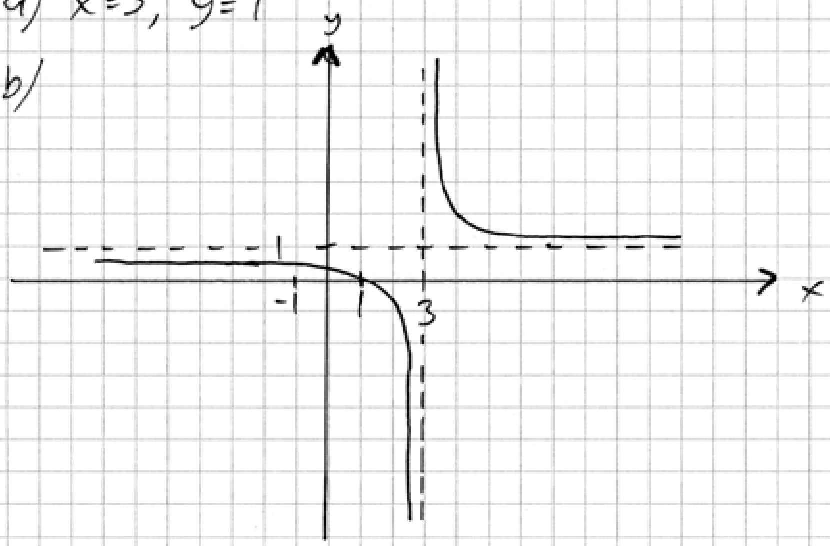
Uppgift 11c

Elevlösning 1 (1 A_{PL})

$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

a) $x=3$, $y=1$

b)



c) $|f(x)|>3$ $\quad f(x)=\frac{x+1}{x-3}$ $\quad \left|\frac{x+1}{x-3}\right|>3$

$x=1 \Rightarrow \frac{1+1}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$

$x=2 \Rightarrow \frac{2+1}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3$

$x=4 \Rightarrow \frac{4+1}{4-3} = \frac{5}{1} = 5$

$x=5 \Rightarrow \frac{5+1}{5-3} = \frac{6}{2} = 3$

$x=6 \Rightarrow \frac{6+1}{6-3} = \frac{7}{3}$

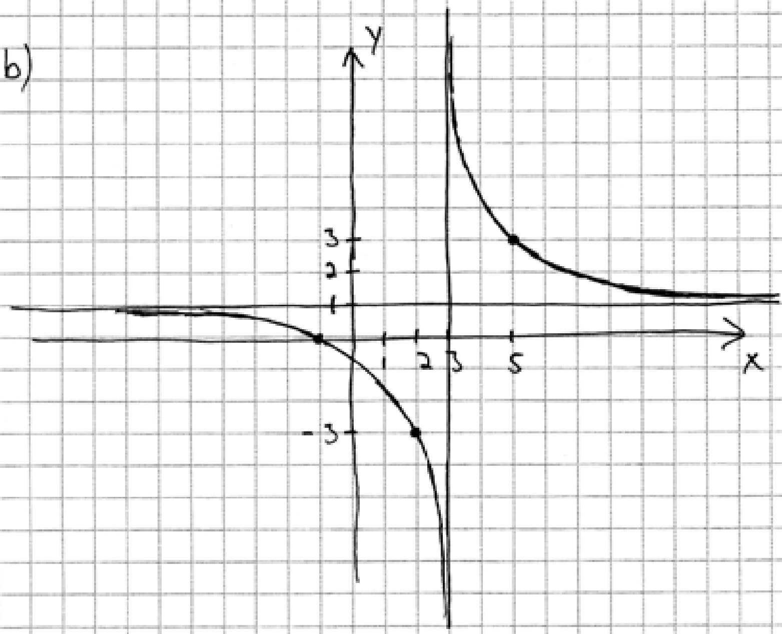
Svar: $2<x<5$

Kommentar: Elevlösningen visar hur ett antal funktionsvärden beräknats. Tillsammans med den schematiska skissen i b)-uppgiften anses lösningen nätt och jämnt vara godtagbar trots att en motivering eller hänvisning till skiss saknas. Sammantaget ges lösningen till c)-uppgiften en problemslösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 A_{PL} och 1 A_B)

a) $x = 3 \quad y = 1$

b)



c) $|f(x)| > 3$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\left|\frac{x+1}{x-3}\right| > 3$$

$$\left.\begin{array}{l} x > 2 \Rightarrow |f(x)| > 3 \\ x < 5 \Rightarrow |f(x)| > 3 \end{array}\right\} \quad 2 < x < 5 \quad x \neq 3 \Rightarrow |f(x)| > 3$$

Svar c: $2 < x < 5 \quad x \neq 3 \Rightarrow |f(x)| > 3$

Kommentar: Elevlösningen visar på en godtagbar lösning där två punkter tydligt och korrekt markerats i grafen i b)-uppgiften. En hänvisning till grafen saknas men anses vara underförstådd då punkterna är så tydligt markerade. Sammantaget ges lösningen till c)-uppgiften en problemlösningspoäng och en begreppspoäng på A-nivå.

Uppgift 12b

Elevlösning 1 (2 A_{PL})

$$z_1^{\,p} = 1^p \cdot \left(\cos(9^\circ \cdot p) + i\sin(9^\circ \cdot p)\right) = i = z^p$$

$$1^p \cdot \left(\cos(9^\circ \cdot p) + i\sin(9^\circ \cdot p)\right) = 1 \cdot (\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$$

$$9^\circ \cdot p = 90^\circ$$

$$p = 10 + \frac{360}{9} \cdot n = 10 + 40n$$

$p = 10 + 40n$ då z_1 är en lösning till $z^p = i$

Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar lösning av problemet trots att vissa förklaringar saknas, bland annat motivering av perioden. Sammantaget ges lösningen nätt och jämnt två problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 13

Elevlösning 1 (2 C_R och 1 C_P)

a:

$$z^3 - 2$$

$$z^5 + 0z^4 + 4z^3 - 2z^2 + 0z - 8 \;\big|\; z^2 + 4$$

$$-(z^5 + 4z^3)$$

$$-2z^2 + 0z - 8$$

$$-(-2z^2 - 8)$$

$$0 \quad 0$$

faktor

Svar: $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = (z^2 + 4)(z^3 - 2)$

b: $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$

lösning 1: $(z^2 + 4) = 0$ $\quad z^2 = -4$

$z_1 = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

lösning 2:

$(z^3 - 2) = 0$ $\quad z = \pm\sqrt[3]{2}$

Svar: $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$ $\quad z_{3-5} = ?$

Kommentar: Elevlösningen visar i a)-uppgiften en polynomdivision som utmynnar i att $z^2 + 4$ är en faktor. I b)-uppgiften bestäms fyra lösningar varav tre korrekta. Sammantaget ges lösningen två resonemangspoäng på C-nivå i a)-uppgiften samt, på grund av den felaktiga lösningen $-\sqrt[3]{2}$, nätt och jämnt en procedurpoäng på C-nivå i b)-uppgiften.

Elevlösning 2 (2 C_R, 1 C_P, 1 A_{PL} och 1 A_K)

a) $P(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^3 - 2 \\
\hline
z^2+4 & z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 \\
 & -(z^5 + 4z^3) \\
\hline
 & 0 \quad -2z^2 - 8 \\
 & -(-2z^2 - 8) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Resten $= 0 \Rightarrow z^2 + 4$ är en faktor i polynomet.

b) $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = (z^2+4)(z^3-2)$

$(z^2+4)(z^3-2) = 0$

$z^2 + 4 = 0$

$z^2 = -4$

$z = \pm 2i$

$z^3 - 2 = 0$

$z^3 = 2$

$z^3 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$

$z = r(\cos v + i \sin v)$

$r^3 = 2$

$3v = 0 + n \cdot 2\pi$

$v = \frac{2\pi}{3} \cdot n$

Svar: $z_1 = 2i \quad z_2 = -2i \quad z_3 = 2^{1/3}$

$z_4 = 2^{1/3}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \quad z_5 = 2^{1/3}\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$

Kommentar: Elevlösningen visar i a)-uppgiften en polynomdivision och en motivering av att $z^2 + 4$ är en faktor. I b)-uppgiften bestäms samtliga lösningar till ekvationen. Lösningen är väl motiverad i a)-uppgiften, i b)-uppgiften saknas bland annat hänvisning till de Moivres formel. Lösningen är trots detta lätt att följa och förstå och anses därmed nätt och jämnt uppfylla kravet för kommunikationspoäng. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng inklusive kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 14

Elevlösning 1 (2 A_{PL})

$$\int_0^{\pi/6} (2\sin x + 5)\cos x \, dx$$

$$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x + 5\cos x$$

$$f(x) = (\sin x)^2 + 5\sin x + C$$

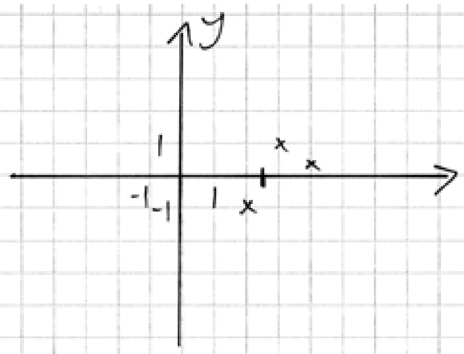
$$\left[(\sin x)^2 + 5\sin x\right]_0^{\pi/6} \qquad (\sin 0 = 0)$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2 + 5\sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$$

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt primitiv funktion med ett korrekt svar. Motivering av hur den primitiva funktionen tagits fram saknas men lösningen anses ändå vara godtagbar. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på A-nivå.

Uppgift 15

Elevlösning 1 (1 A_R)



Att $f'(x) < 0$ innebär att funktionen aldrig är stigande. Men om den har en asymptot (då $x = 2,5$) kan den alltid vara avtagande och ändå ha ett större y-värde då x-värdet ökar.

Kommentar: I elevlösningen konstateras att funktionen har en asymptot och skissen visar två funktionsvärden (då $x = 3$ och då $x = 4$) som är större än $-\frac{1}{5}$. Detta anses vara jämförbart med en godtagbar ansats. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A_R och 1 A_K)

Lasse har glömt att funktionen har en asymptot vid $x = 2,5$ (då är nämnaren $= 0$) och om $x \to 2,5$ från $x > 2,5$ kommer $f(x)$ att gå mot ett oändligt stort tal.
Därför antar inte heller funktionen något egentligt största värde vid $x \geq 0$, eftersom $f(x) \to \infty$ när $x \to 2,5$ från $x > 2,5$ är det inget definierat största värde vid $x = 2,5$.

Kommentar: Elevlösningen är korrekt med godtagbar motivering. Lösningen är lätt att följa och förstå trots att en förklarande skiss saknas. Kraven för kommunikationspoäng på A-nivå uppfylls därmed nätt och jämnt.

Uppgift 20

Elevlösning 1 (1 E_P och 2 C_M)

$$\frac{dV}{dt} + 5v = 10 \quad \rightarrow \quad v' + 5v = 10$$

a) $v(t) = 2 - 2e^{-5t}$

$v'(t) = 0 + 10e^{-5t}$

$0 + 10e^{-5t} + 5(2 - 2e^{-5t})$

$10e^{-5t} + 10 - 10e^{-5t} = 10$

b) $2 - 2e^{-5t}$

$F(x) = 0{,}4\, e^{-5t}$

$F(B) - F(A)$

$\int_0^x 2 - 2e^{-5t} = 8$

$\left[2t + 0{,}4e^{-5t}\right]_0^x$

$F(x) = 2x + 0{,}4e^{-5x} - 0{,}4 \quad = Y_1$

$F(x) = 8 \quad = Y_2$

$\}$ Ritar Y_1 och Y_2 på räknaren. Hittar skärningspunkten med "intersect".

$x = 4{,}2$

Svar 4,2 sek.

Kommentar: Elevlösningen visar på godtagbara lösningar av båda deluppgifterna. Vad gäller kommunikation så saknas t ex uttryck som VL och HL i a)-uppgiften och b)-uppgiften är ostrukturerad och relativt svår att följa. Därmed uppfylls inte kravet för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på E-nivå i a)-uppgiften samt två modelleringspoäng på C-nivå i b)-uppgiften.

Elevlösning 2 (1 E_P, 1 C_M och 1 C_K)

a) $\frac{dv}{dt} + 5v = 10$

$v' + 5v = 10$

$v(t) = 2 - 2e^{-5t}$

$v'(t) = -2e^{-5t} \cdot (-5) = 10e^{-5t}$

$v' + 5v = 10$

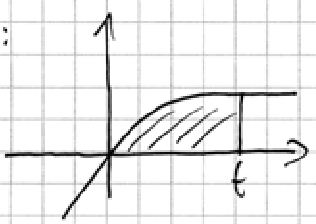
$V.L. = 10e^{-5t} + 5(2 - 2e^{-5t}) = 10e^{-5t} + 10 - 10e^{-5t} =$

$= 10 = H.L.$

Svar: $v(t) = 2 - 2e^{-5t}$ är alltså en lösning till differentialekvationen

b) $v = 2 - 2e^{-5t}$

Skiss:



Arean under grafen är sträckan

När arean under grafen är 8 har fågeln nått marken.

$\int_0^x (2 - 2e^{-5t})\,dt = 8 \Rightarrow \left[2t + 0{,}4e^{-5t}\right]_0^x = 8$

$2x^2 + 0{,}4e^{-5x} = 8 \Rightarrow x = 2$ sek.

Svar: Fågeln når marken efter 2 sekunder.

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och trots att lösningen innehåller en felaktighet i b)-uppgiftens näst sista rad så bedöms lösningen vara tillräckligt korrekt för att kunna ges kommunikationspoäng. Lösningen kommuniceras med t ex $v(t)$, $v'(t)$, VL, HL, en skiss med förklarande text och en förklaring ”När arean under grafen är 8 har fågeln nått marken.”. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på E-nivå i a)-uppgiften och den första modelleringspoängen på C-nivå samt en kommunikationspoäng på C-nivå i b)-uppgiften.

Uppgift 21

Elevlösning 1 (2 C_M och 2 C_{PL})

a/ Skriv in funktionen på grafritaren.
Välj $\int f(x)\,dx$ och ange lower limit 0 och upper limit 10.
Svar: $P = 0{,}81$

b/ Testade mig fram på räknaren med lower limit 0

upper limit	Sannolikheten att få hjälp inom x min
5	0,57
4	0,49
4,5	0,53
4,3	0,51
4,1	0,495
4,2	0,503

$x = 4{,}2$ min. Dock är det troligt att man skulle välja att avrunda till hela minuter.

Kommentar: Elevlösningen visar på en godtagbar lösning. Redovisningen om hur det digitala hjälpmedlet använts är tydlig i a)-uppgiften och i b)-uppgiften anses redovisningen vara implicit förklarad av a)-uppgiften. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng för båda deluppgifterna.

Uppgift 21b

Elevlösning 1 (1 C_{PL})

b) $$\int_0^x \left(\frac{1}{6} e^{-x/6}\right) dx = 0,5$$

Genom att testa sig fram på räknaren kom jag fram till ett närmevärde på 4,2 min.

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt uppställd ekvation för bestämning av tiden. Förklaring till hur det digitala hjälpmedlet använts saknas, därmed anses inte lösningen vara godtagbar. Sammantaget ges lösningen av b)-uppgiften en problemlösningspoäng på C-nivå.

Uppgift 23

Elevlösning 1 (1 A_{PL})

$A \sin x \cdot \sin x + B$

$A = 1 - (-2) = 3$

B: Eftersom $\sin^2 x + 0$ kurvan har sin min-punkt på x-axeln, kommer B-värdet vara avståndet mellan funktionens min-punkt och x-axeln. I det här fallet blir $B = -2$.

$A = 3$

$B = -2$

Kommentar: Lösningen visar en bestämning av konstanten *B* med godtagbar motivering. Motivering till varför konstanten $A = 3$ saknas. Sammantaget ges lösningen den första problemslösningspoängen på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A_{PL})

$y(x) = A \sin^2 x + B$

$y(0) = 0 + B = -2$ ← kollar det grafiskt i grafen på provpappret

$\Rightarrow B = -2$

Termen $A \sin^2 x$ kommer alltid att vara positiv i och med kvadrattermen. När $x = \pi/2$ eller $3\pi/2$ kommer $\sin^2 x$ att ha sitt högsta värde: $\sin^2 \pi/2 + n\pi = 1$ $\Rightarrow$

$A \cdot 1 - 2 = 1$ ← (det högsta värdet kurvan antar är 1, det är grafiskt verifierbart, se provpappret)

$A - 2 = 1$

$A = 3$

SVAR: $A = 3$ och $B = -2$

Kommentar: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av de båda konstanterna. Konstanternas värde motiveras väl trots det felaktiga påståendet ”Termen $A\sin^2 x$ kommer alltid att vara positiv”. Sammantaget ges lösningen två problemslösningspoäng på A-nivå.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 4

Betyget E Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 4

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Aritmetik, algebra och geometri

A6	Metoder för beräkningar med komplexa tal skrivna på olika former inklusive rektangulär och polär form.
A7	Komplexa talplanet, representation av komplext tal som punkt och vektor.
A8	Konjugat och absolutbelopp av ett komplext tal.
A9	Användning och bevis av de Moivres formel.
A10	Algebraiska och grafiska metoder för att lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter och reella polynomekvationer av högre grad, även med hjälp av faktorsatsen.
A11	Hantering av trigonometriska uttryck samt bevis och användning av trigonometriska formler inklusive trigonometriska ettan och additionsformler.
A12	Algebraiska och grafiska metoder för att lösa trigonometriska ekvationer.
A13	Olika bevismetoder inom matematiken med exempel från områdena aritmetik, algebra eller geometri.

Samband och förändring

F17	Egenskaper hos trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion.
F18	Skissning av grafer och tillhörande asymptoter.
F19	Härledning och användning av deriveringsregler för trigonometriska, logaritm-, exponential- och sammansatta funktioner samt produkt och kvot av funktioner.
F20	Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av integraler med och utan digitala verktyg, inklusive beräkningar av storheter och sannolikhetsfördelning.
F21	Begreppet differentialekvation och dess egenskaper i enkla tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

Problemlösning

P1	Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
P3	Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
P4	Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.

Bedömningsformulär

Elev:___________________________ Klass:_______________ Provbetyg:____________

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
Del B	1a												
	1b												
	2a												
	2b												
	3												
	4												
	5_1												
	5_2												
	6												
Del C	7_1												
	7_2												
	8_1												
	8_2												
	9a_1												
	9a_2												
	9b_1												
	9b_2												
	10_1												
	10_2												
	11a_1												
	11a_2												
	11b_1												
	11b_2												
	11c_1												
	11c_2												
	12a_1												
	12a_2												
	12b_1												
	12b_2												

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del C	13a_1												
	13a_2												
	13b_1												
	13b_2												
	13b_3												
	14_1												
	14_2												
	15_1												
	15_2												
	15_3												
Del D	16_1												
	16_2												
	17_1												
	17_2												
	18a												
	18b												
	19_1												
	19_2												
	19_3												
	20a												
	20b_1												
	20b_2												
	20b_3												
	21a_1												
	21a_2												
	21b_1												
	21b_2												
	22_1												
	22_2												
	23_1												
	23_2												
	Total												
Σ													

	Total	**5**	**8**	**4**	**6**	**3**	**8**	**6**	**7**	**4**	**0**	**9**	**7**
Σ	**67**	**23**				**24**				**20**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Insamling av provresultat för matematik

Från och med höstterminen 2011 utför SCB (Statistiska centralbyrån) på uppdrag av Skolverket en totalinsamling av elevresultat. Information om denna totalinsamling utgår från SCB. **Sista dag för insamlingen är den 18 juni 2013.**

Förutom denna totalinsamling genomför provinstitutionen en urvalsinsamling. Denna insamling är nödvändig för att kunna utvärdera och utveckla de nationella kursproven. Genom att du och dina kollegor skickar in resultat är det möjligt att publicera en rapport med resultat från vårens prov i slutet av augusti. Rapporten kommer att finnas tillgänglig på http://www.edusci.umu.se/np-pb/np-2-4. Genom att använda återrapporteringsfilen för urvalsinsamlingen fås även en enkel sammanställning över elevens resultat fördelat på de olika förmågorna.

Urvalsinsamlingen

1. Gå in på www.edusci.umu.se/np-pb/np-2-4 och klicka på länken **Resultatinsamling vt 2013** som du finner under rubriken Aktuellt högst upp till höger på sidan.

2. Ladda ner den Excelfil som tillhör det kursprov som ska återrapporteras. Observera att det finns en fil för varje prov och för att det ska vara möjligt att genomföra återrapporteringen så måste filen vara densamma som den kurs som ska redovisas.

3. Fyll i elevresultat för **elever födda den 3:e, 8:e, 16:e och 27:e i varje månad** i den undervisningsgrupp som genomfört provet. Vill du använda återrapporteringsfilen för hela klassen så är det naturligtvis möjligt att skicka in den kompletta Excelfilen. Observera att Excelfilen måste sparas i det ursprungliga formatet det vill säga Excel 97-2003 arbetsbok med ändelsen .xls för att filen ska vara möjlig att ladda upp.

4. Gå in på www.edusci.umu.se/np-pb/np-2-4 och klicka på länken **Resultatinsamling vt 2013.** Ange **mona8en** i rutan för lösenord. Skapa en användare och ange några bakgrundsdata. Ett lösenord skickas till den angivna e-postadressen och det blir därmed möjligt att påbörja en återrapportering och sedan slutföra den vid ett senare tillfälle.

5. Fyll i lärarenkäten angående kursen och gruppen.

6. Ladda upp Excelfilen för den aktuella gruppen.

7. Skicka en kopia av bedömda elevlösningar för **elever födda den 3:e i varje månad** till:

Umeå universitet, Samhällsvetarhuset
Institutionen för tillämpad utbildningsvetenskap
Nationella prov
Att: Monika Kriström
901 87 UMEÅ

Eftersom vissa svar i lärarenkäten skiljer sig åt mellan grupper måste du göra om delar av proceduren ovan (steg 2-7) för varje grupp om du har genomfört nationella kursprov i flera undervisningsgrupper. För att det ska vara möjligt att publicera en resultatrapport i slutet av augusti måste vi ha alla resultat **senast den 26 juni 2013.**