

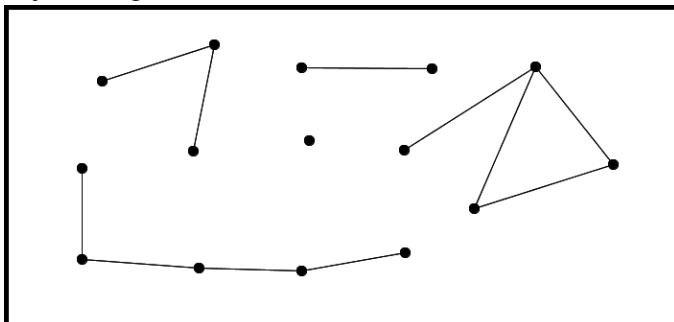
Del A: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

- 1) Vilka element ingår i mängden
 $A = \{n; n \in \mathbb{Z} \text{ och } |n| < 4\}$

- 2) Ett prov har 10 uppgifter, där man i varje uppgift ska välja det korrekta svaret av två alternativ. För ett korrekt svar får man en poäng, och för ett felaktigt svar förlorar man en poäng. En dåligt förberedd studerande väljer alla svar genom att gissa. Med vilken sannolikhet får studeranden minst 8 poäng i provet?

- 3) En tipsrad består av 13 rader som var och en kan vara 1, X eller 2. Vad är sannolikheten att man helt slumpmässigt tippas alla 13 rätt?

- 4) En graf som *endast* består av träd kallas en skog. Titta på grafen nedan och besvara följande frågor:



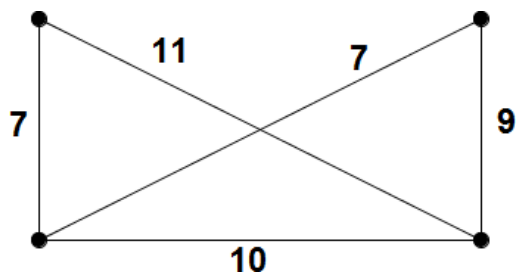
- a) Hur många träd finns i grafen och vilka är träden?
 - b) Kan man kalla grafen för skog? Motivera!
-
- 5) I en påse ligger 5 vita och 8 svarta kulor. Hur många kulor måste du, utan att titta, plocka upp för att säkert få
 - a) två av samma färg?
 - b) två av vardera färg?
 - c) två svarta kulor?

6) Du har en mängd $M = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

a) Hur många delmängder har M ?

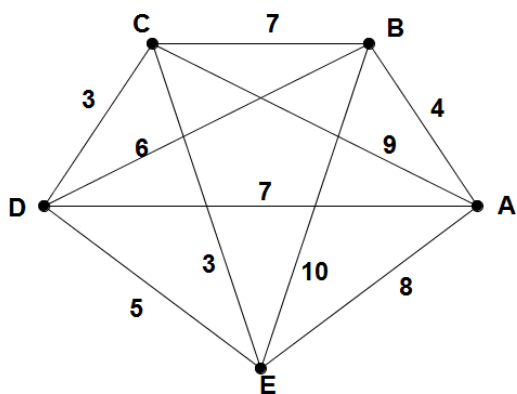
b) Skriv upp alla delmängder med 2 element eller färre.

7) Rita alla de möjliga uppspännande träden i grafen nedan samt bestäm vikten av det minimalt uppspännande trädet.



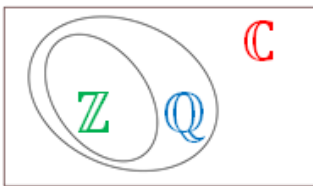
8) Vid tillverkning av miniräknare vet man att 2 av 1000 miniräknare är defekta. Man väljer ut 50 miniräknare av dessa 1000 för en kvalitetskontroll. Hur stor är sannolikheten att det är exakt en defekt miniräknare bland de 50 man väljer ut?

9) Konstruera ett minimalt uppspännande träd i grafen nedan. Rita trädet och beräkna dess vikt.



10) Hur många olika ord kan skrivas med bokstäverna MAMMA?

- 11) På en arbetsplats med 18 flickor och 12 pojkar skall man välja en arbetsgrupp på 6, av vilka minst 3 skall vara pojkar. På hur många olika sätt kan det ske?
- 12) Antag att det finns exakt 7,3 miljarder människor i världen idag. Det finns 366 olika datum att fylla år på. Förklara varför det finns minst ett datum då minst 19 945 356 personer fyller år.
- 13) I figuren nedan är universalmängden \mathbb{C} , de komplexa talen. \mathbb{Z} är de hela talen och \mathbb{Q} de rationella talen.



Beskriv med hjälp av mängdoperationer, mängder och symboler var talet $2^{1/2}$ ska placeras. Förklara hur du tänkt.

Bedömningsanvisningar

1) -3, -2 -1,0, 1, 2, 3

Korrekt svar

+ E_B

2) 1 %

Godtagbar ansats till exempel kommer fram till att minst 8 *poäng* ges om man har 9 eller 10 *korrekta svar*.

+ E_M

Korrekt svar + redovisad lösning till exempel:

$$0,5^{10} \cdot \binom{10}{9} + 0,5^{10} \cdot \binom{10}{10} \approx 0,0098 + 0,00098 \approx 0,01 = 1\%$$

+ E_{PL}

3) $\frac{1}{3^{13}} = \frac{1}{1\,594\,323}$

Godtagbar metod

+ E_P

med korrekt svar.

+ E_P

4) a) **Korrekt svar: Det finns 4 träd. Träden är de sammanhängande delgraferna med 1 nod/hörn, 2 noder/hörn, 3 noder/hörn och 5 noder/hörn.**

Alternativt: Rita de delgrafer som är träd

Korrekt svar (både antal och vilka träden är)

+ E_B

b) **Korrekt svar: Nej**

Godtagbar motivering är till exempel: Eftersom en av delgraferna (den med 4 noder/hörn) inte är ett träd kan man inte kalla grafen en skog.

Korrekt svar

+ E_B

5) a) 3 st

Godtagbar motivering, enligt lådrprincipen 1 svart +1 vit + 1 svart eller vit =3 + E_B

med korrekt svar. + E_B

b) 10 st

Godtagbar motivering, t.ex. i fallet 8 svarta + 2 vita + E_B

med korrekt svar. + E_B

c) 7 st

Godtagbar motivering, 5 vita +2 svarta + E_B

med korrekt svar. + E_B

6) a) **Korrekt svar: 32 delmängder.**

Korrekt svar + E_B

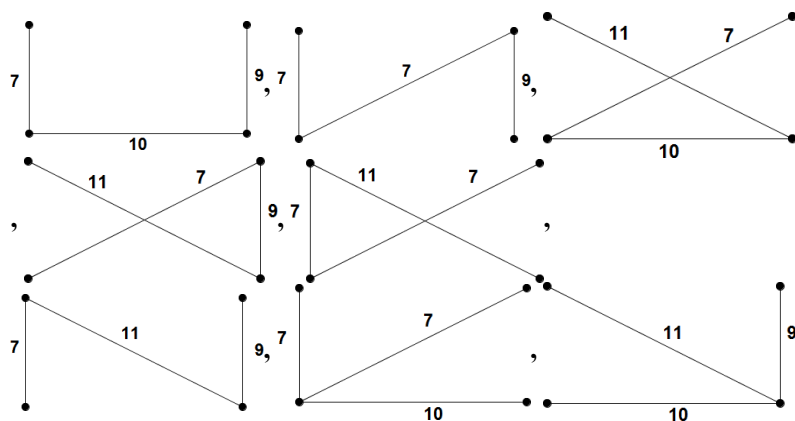
b) **Korrekt svar:**

$\{\emptyset\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{11\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 11\},$
 $\{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 11\}, \{5, 7\}, \{5, 11\}, \{7, 11\}$

Godtagbar ansats, till exempel skriver upp 10 delmängder korrekt utan att skriva upp någon felaktig eller dubletter. Observera att varje delmängd måste stå innanför egna mängdklammrar, annars är det ingen mängd. + E_B

Korrekt svar. + C_B

7) Korrekt svar:



Trädet med den lägsta vikten har vikten 23.

Godtagbar ansats, till exempel ritar 4 korrekta uppspännande träd + E_B

Ritar alla 8 möjliga uppspännande träd korrekt + C_B

Korrekt värdet på det minimala uppspännande trädet + E_p

8)

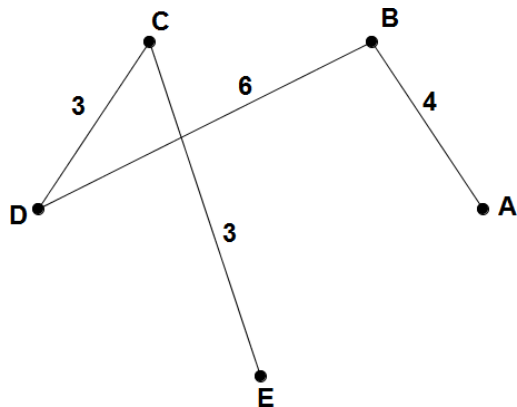
$$\frac{\binom{998}{49} \cdot 2}{\binom{1000}{50}} = \frac{95}{999} \approx 9,5\%$$

Godtagbar ansats, t ex beräknar på hur många sätt man kan välja ut 50 av

1000 miniräknare $\binom{1000}{50}$. + E_{PL}

med korrekt svar. + C_{PL}

9) **Korrekt svar: Vikten är 16 och trädet ser ut som grafen nedan**



Godtagbar ansats, ritat ett uppspannande träd även om det inte är det minimala

+ E_B

Korrekt svar

+ C_P

10) **Korrekt svar: $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ st**

Godtagbar ansats, t ex beräknar alla kombinationer utan ta hänsyn till att vissa bokstäver är lika

+ E_{PL}

med godtagbar fortsättning och korrekt svar

+ C_{PL}

11) **270 435 olika sätt.**

Godtagbar lösning till exempel:

$$\binom{12}{3} \binom{18}{3} + \binom{12}{4} \binom{18}{2} + \binom{12}{5} \binom{18}{1} + \binom{12}{6}$$

+ C_M

med korrekt svar.

+ C_{PL}

12) Godtagbar ansats, till exempel visar insikt om att de 366 dagar som finns på ett skottår är "postfacken" och de 7,3 miljarder människor är objekten som ska delas in i postfacken.

+ C_B

Godtagbar slutsats

+ C_R

13) Svar: $2^{1/2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$

Motivering: $2^{1/2} = \sqrt{2}$, vilket är ett irrationellt tal som tillhör delmängden

$\mathbb{R} = \{\text{rationella och irrationella tal}\}$ och $\mathbb{C} = \{\text{Alla tal } a + bi \text{ där } a \text{ och } b \in \mathbb{R} \text{ och } i \text{ är den imaginära enheten}\}$.

Därför kan de irrationella talen uttryckas som $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, som symboliserar alla tal som finns i \mathbb{C} , men inte i \mathbb{Q} . Detta innebär att eftersom $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ återstår bara de irrationella talen.

Godtagbar ansats till exempel inser att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal.

+ C_B

Godtagbar motivering med korrekt svar

+ A_B