Del A: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

1) Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen:
$y' = 2y + 6x$

1/0/0

2) Bestäm den lösning till ekvationen $y' = 3x - 4$ som uppfyller villkoret $y(2) = 6$

2/0/0

3) Lös differentialekvationen

a) $y' = \cos(4x)$ om $y(0) = 3$

b) $4y' - 3y = 0$ om $y'(0) = 6$

4/0/0

4) Ett glas kallt vatten ställs i ett rum med temperaturen 20 °C. En modell för hur vattentemperaturen därefter ökar ges av differentialekvationen
$\frac{dy}{dt} = -0,1\,(y - 20)$ där *y* är vattentemperaturen i °C och *t* är tiden i minuter.

$y = 20 - 19e^{-0,1t}$ är en lösning till denna differentialekvation.

a) Vilken temperatur hade vattnet från början?

b) Med vilken hastighet stiger temperaturen då vattnets temperatur är 10 °C?

c) Med vilken hastighet stiger temperaturen då det gått 10 minuter?

d) Per har en digital termometer som visar vattnets temperatur i hela grader. Enligt Pers mätningar tar det 36 minuter för vattnet att nå rumstemperatur. Stina mäter temperaturen med en digital termometer som visar tiondels grader. Enligt Stina tar det 59 minuter för vattnet att nå rumstemperatur.
Hur hänger det ihop?

5/2/0

5) Visa att $y = \cos(x) \cdot \sin(x)$ satisfierar $2y - y' \cdot \tan(2x) = 0$

0/2/0

6) För funktionerna $g(x)$ och $h(x)$ gäller

$$\begin{cases} g'(x) = 1 - h'(x) \\ h'(x) = h(x) \end{cases}$$

Bestäm $g(x)$ och $h(x)$.

0/2/0

7) Betrakta differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, $y\left(0\right) = 1$

a) Redogör för en numerisk metod för bestämning av ett värde på $y\left(1\right)$.

b) Bestäm $y\left(1\right)$ numeriskt med minst fyra steg.
Endast svar fordras

c) Förklara varför den numeriska metoden inte duger till att beräkna $y\left(3\right)$.

2/1/1

8) Differentialekvationen $y' + y = x^2$ har en lösning $y_1 = x^2 - 2x + 2$.

a) Verifiera att y_1 är en lösning till differentialekvationen.

b) Differentialekvationen $y' + y = 0$ har en lösning $y_2 = Ce^{-x}$. Förklara varför $y_1 + y_2$ är en lösning till $y' + y = x^2$.

c) Differentialekvationen $y' + ky = f(x)$ har lösningen y_3 och differentialekvationen $y' + y = 0$ har lösningen y_4.

Förklara varför $y_3 + y_4$ är en lösning till $y' + ky = f(x)$.

2/1/1

9) Ett kärl innehåller 10 liter vatten och är fyllt så att om någon mer vätska fylls på så rinner överskottet över kanten. Från en behållare häller man mycket sakta i ett färgämne som snabbt löser sig i vattnet. För att hitta rätt blandning hälls färgämnet i med hastigheten 2,0 liter/min från början. Sedan häller man i färgämnet med avtagande hastighet tills inget hälls i alls. Hastigheten minskar linjärt under 10 minuter.

Differentialekvationen $y'(t) = V(t) - V(t) \cdot \dfrac{y(t)}{10}$ beskriver volymen y liter av färgämnet i tanken efter t minuter och $V(t)$ är hastigheten för den volym färgämne som tillsätts i liter/min.

Hur mycket färg har hälltts i under de tio minutrarna och hur mycket finns kvar i tanken?

0/1/2

Bedömningsanvisningar

1) $y = -3x - \frac{2}{3} + Ce^{2x}$

Korrekt lösning med digitalt verktyg. $+ E_P$

2) $y = \frac{3x^2}{2} - 4x + 8$

Korrekt allmän lösning $\left(y = \frac{3x^2}{2} - 4x + C\right)$ $+ E_P$

med korrekt svar. $+ E_P$

3) a) $y = \frac{1}{4}\sin(4x) + 3$

Korrekt allmän lösning. $+ E_P$

Korrekt konstantbestämning. $+ E_P$

b) $y = 8e^{\frac{3x}{4}}$

Korrekt allmän lösning. $+ E_P$

Korrekt konstantbestämning. $+ E_P$

4) a) **1 °C**

Korrekt svar. + E_{PL}

b) **1 °C/min**

Korrekt tecknat uttryck för beräkning.
$-0,1(y-20) = -0,1(10-20) = 1$

+ E_{M}

Godtagbart svar. + E_{PL}

c) **0,7 °C/min**

Korrekt metod för beräkning.
$-0,1\left(10-19e^{-0,1\cdot 10}-20\right) \approx 0,7$

+ E_{M}

Godtagbart svar. + E_{PL}

d) $y = 19,5 \Rightarrow t = 36$ **min,** $y = 19,95 \Rightarrow t = 59$ **min**

Redovisad godtagbar förklaring + C_{R}

Vid bedömningen tas hänsyn till elevens insikt i bakomliggande avrundningsproblematik, verifikation av angivna värden, visad insikt om exponentialfunktionens egenskaper samt formulering av slutsats. + C_{B}

5) Redovisat korrekt derivata $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$ + C_{P}

Verifierat att funktionen satisfierar differentialekvationen

$$2y - y' \cdot \tan\, 2x = 2\left(\cos\, x\, \sin\, x\right) - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \cdot \frac{\sin\, 2x}{\cos\, 2x} =$$
$$2\cos\, x\, \sin\, x - \left(\cos^2\, x - \sin^2 x\right) \cdot \frac{2\sin\, x\, \cos\, x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$
$$2\cos\, x\, \sin\, x - 2\, \sin\, x\, \cos\, x = 0$$

+ C_{P}

6) $h(x) = Ae^{x}$
$g(x) = x - Ae^{x} + B$

Godtagbar bestämning av $h(x)$. + C_{PL}

Godtagbar bestämning av $g(x)$. + C_{PL}

7) a) Godtagbar redovisning av lämplig metod. + E_P

b) **0,90 med Eulers metod och 4 steg, 0,856 är bästa närmevärde.**

Godtagbart svar. + E_P

c) **Godtagbar motivering som bygger på att den numeriska metoden inte kan överbrygga diskontinuiteten i $x = 2$.**

En motivering där eleven t ex skriver att ”det blir 0 i nämnaren för $x = 2$” eller motsvarande. + C_R

En motivering som tyder på förståelse för att man med den numeriska metoden inte kan följa lösningskurvan över ”brottet” i $x = 2$. + A_R

8) a) **Deriverar funktionen och sätter in uttrycken i vänsterledet. Visar att detta är lika med högerledet.**

Godtagbar ansats, bestämmer y’ korrekt och sätter in uttrycken för y’ och y i ekvationen + E_B

med godtagbar fortsättning och korrekt slutsats där VL och HL behandlas separat. + E_P

b) **Deriverar $y_1 + y_2$ och sätter in i differentialkvationen och visar likheten.**

Korrekt svar + C_R

c) **Sätter in $y_3 + y_4$ i differential ekvation modifierar uttrycken och visar separat att $VL = HL$.**

Korrekt svar + A_R

9) **Korrekt svar: 6,32 l färgämne finns i tanken och 10 l har tillsatts**

Godtagbar ansats, beräknar mängden färg som tillsats + C_M

Godtagbar ansats, t ex tecknar differentialekvationen $y\text{'} = 2 - 0,2t \ - \left(2 - 0,2t\right)\dfrac{y}{10}$ där y är volymen färg i tanken i liter och $y(0) = 0$. + A_M

med godtagbar fortsättning och korrekt svar. + A_{PL}